GIEŁDA PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH
w Warszawie

O możliwościach arbitrażu na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie

Jerzy A. Dzieża

Maj 2005

Spis treści

Jedną z fundamentalnych zasad finansów jest brak możliwości arbitrażu na rynku finansowym. Można tę zasadę wytłumaczyć tym, że gdyby istniała możliwość arbitrażu, to inwestorzy mogliby uzyskać nieograniczony majątek, zajmując nieograniczoną pozycję w portfelu arbitrażowym, przy zerowych nakładach własnych środków. Teoria zakłada, że arbitraż jest zbyt dobrą możliwością inwestycyjną, aby był prawdziwy. Znana historia mówi, że banknot $100, który leży na ulicy nie może być prawdziwy, bo gdyby był, to by tam nie leżał[1].

O arbitrażu – wstępne rozważania

Na rynkach finansowych możemy jednak spotkać wszelkiego rodzaju arbitraże. Większość tych możliwości wynika z faktu, że te same aktywa mogą być w obrocie na różnych rynkach i pod różnymi postaciami. Już w XIX wieku finansiści zauważyli, że ceny złota w Londynie i w Nowym Jorku były różne. Kupując złoto w jednym mieście i sprzedając je w drugim osiągali zyski nie ponosząc ryzyka.

Akcja jest źle wyceniona, jeśli cena nie odpowiada jej cenie równowagi. A jak określić równowagę? U podstaw klasycznych teorii ekonomicznych leżą niearbitrażowe mechanizmy. Najistotniejszym z nich jest podaż i popyt. Stan równowagi zakłada zbilansowanie tych dwóch wielkości i cena – niezależnie czy są to opcje na indeks, akcje czy marchewka na targu – powinna to odzwierciedlać.

Tradycyjne podażowo – popytowe uzasadnienie stanu równowagi ekonomicznej znajdujemy w modelu wyceny aktywów kapitałowych (Capital Asset Pricing Model) CAPM. Natomiast brak możliwości arbitrażu jest związany z prawem jednej ceny. Podobne podejście widać w arbitrażowym modelu wyceny (Arbitrage Pricing Theory) APT. Według APT, to arbitraż a nie popyt i podaż decydują o relacji pomiędzy ryzykiem a zyskiem. Niezależnie od poziomu ryzyka na rynku, arbitraż wymusi taką sytuację, w której zakładane zyski będą proporcjonalne do wrażliwości na to ryzyko. Idea sprowadza się do konstrukcji portfela wolnego od ryzyka.

Wycena wszelkich instrumentów pochodnych oparta jest na hipotezie rynku efektywnego, która mówi, że na takim rynku nie ma możliwości arbitrażu. Chociaż w praktyce nie zawsze to jest prawda jednak założenie o braku możliwości arbitrażu pozwala na znalezienie jedynej ceny instrumentu pochodnego.

Klasyczne modele, stosowane do wyceny instrumentów pochodnych czynią pewne założenia o funkcjonowaniu rynku finansowego. Najważniejsze z nich to:

- oprocentowanie kredytów i depozytów bankowych jest jednakowe i niezmienne w czasie zajmowania pozycji arbitrażowej,
- aktywa są nieskończenie podzielne,
- nie ma kosztów transakcji,
- istnieje możliwość zajmowania (nieograniczonych) długich i krótkich pozycji,
- inwestorzy posiadają jednakowy dostęp do wszystkich instrumentów i do informacji dotyczących cen (symetryczność informacji).

Rynek o takich cechach określa się mianem **rynku doskonałego**. Używa się też często określenia **rynek bez tarcia** (*frictionless market*).
Jak już wspomnieliśmy, zdecydowana większość modeli teoretycznych dotyczących wyceny instrumentów pochodnych, w tym kontraktów terminowych oraz opcji opiera się na idei braku możliwości arbitrażu na rynkach finansowych.
Możliwością arbitrażu nazywany jest portfel gwarantujący inwestorowi zysk w określonym momencie T w przyszłości bez ryzyka poniesienia straty.
Chociaż możliwości arbitrażu pojawiają się na rzeczywistych rynkach finansowych, nie mogą być jednak trwale na nich obecne. Nie istnieje możliwość generowania zysków bez ponoszenia nakładów finansowych. Jak mówi znane przysłowie na rynku nie ma takiej rzeczy jak darmowy obiad (*there's no such thing as a free lunch*).

[1] P. L. Berstein, *Intelektualna historia Wall Street*, WIG-Press, Warszawa, 1998.

W istocie, arbitraż może być postrzegany jako niedostosowanie cenowe odpowiednich aktywów i gdy tylko taka sytuacja pojawia się na rynku, inwestorzy od razu ją wykorzystują, dzięki czemu rynek powraca do równowagi. Jeśli cena jednego instrumentu jest na rynku wyższa, a drugiego niższa, to arbitrażysta zajmuje długą pozycję w instrumencie tańszym, a krótką w droższym.
Reasumując, na rynku efektywnym nie istnieje możliwość (permanentnego) arbitrażu. Ta prawidłowość stosuje się do większości rynków finansowych i problemu wyceny aktywów.

Poniżej przedstawimy nieefektywność rynku giełdowego w Polsce, w tym możliwość zawierania transakcji arbitrażowych na GPW. Zaczniemy od przypadku rynku doskonałego, później roszerzymy rozważania dla **rynku rzeczywistego**, czyli z kosztami transakcji. Te możliwości pokażemy praktycznie dla wszystkich instrumentów pochodnych dostępnych na warszawskim parkiecie.

1. Transakcje arbitrażowe: rynek kasowy - rynek kontraktów futures

1.1. Rynek doskonały

Zaczniemy od pokazania idei arbitrażu, aby uwypuklić istotę problemu, dla jednej akcji w przypadku rynku doskonałego. Rozważmy na początek najprostszy przypadek, czyli taki, w którym instrument bazowy, nie generuje dodatkowej wypłaty (w naszym wypadku dywidendy). Czyli mamy notowane akcje spółki XYZ oraz kontrakt futures na 200 akcji spółki XYZ wygasający za miesiąc. Wiemy dodatkowo, że na rynku finansowym można lokować i pożyczać środki po stopie 6% w skali roku.

Sytuacja 1a (rynek doskonały) – długi arbitraż (*cash-and-carry-arbitrage*)
Załóżmy, że akcja spółki XYZ kosztuje 50 zł, a kontrakt futures 53 zł.
Co robi arbitrażysta? Otóż powinien:
- pożyczyć w banku kwotę 10 000 zł,
- kupić 200 akcji spółki A za 50 zł,
- sprzedać kontrakt futures (zająć krótką pozycję w kontrakcie futures) za 53 zł.

Depozytem zabezpieczającym dla jego pozycji w kontrakcie mogą być kupione akcje.
Inwestor zajmuje zatem dwie przeciwstawne pozycje: długą na rynku kasowym i krótką na rynku kontraktów. Tak utworzony portfel inwestor trzyma do wygaśnięcia kontraktu.

W chwili wygaśnięcia kontraktu futures inwestor zamyka pozycje w portfelu. Załóżmy dwa możliwe scenariusze cenowe na rynku akcji w chwili wygaśnięcia kontraktu:
1. akcja kosztuje 60 zł; inwestor:
   - sprzedaje 200 akcji za 60 zł, czyli ma 12 000 zł;
   - oddaje pożyczkę w banku wraz z odsetkami, czyli 10 000*(1+0,06*1/12) = 10 050 zł
   - rozlicza kontrakt futures: 200*(53-60) zł = -1 400 zł;
   - ma zysk w wysokości: 12 000 – 10 050 – 1 400 = 550 zł
2. akcja kosztuje 40 zł; inwestor:
   - rozlicza kontrakt futures: 200*(53-40) zł = 2 600 zł;
   - sprzedaje 200 akcji za 40 zł, czyli ma 8 000 zł;
   - oddaje pożyczkę w banku wraz z odsetkami, czyli 10 000*(1+0,06*1/12) = 10 050 zł;
   - ma zysk w wysokości: 2 600 + 8 000 – 10 050 = 550 zł.

Zakładamy, że w czasie, gdy inwestor posiadał portfel arbitrażowy nie był wzywany do uzupełnienia depozytu, a rozliczenie kontraktu jest gotówkowe, a nie z dostawą fizyczną akcji.

Zauważmy, że bez względu na to ile kosztuje akcja w chwili wygaśnięcia kontraktu, jego zysk będzie stały 550 zł. Czyli nie mając w ogóle żadnych środków finansowych w momencie otwierania pozycji, inwestor wygenerował niezerowy zysk i to zysk bez ryzyka. Bo nie ma żadnego znaczenia, na jakim poziomie będzie cena akcji (i w konsekwencji kurs kontraktu futures) w momencie zamykania pozycji.

W rozważanym przypadku, kurs kontraktu futures był za wysoka w stosunku do notowanej akcji. Dlatego inwestor zajął długą pozycję w tańszym instrumencie (akcja), a krótką w droższym (kontrakt futures). Taką strategię nazywamy długim arbitrażem (*cash-and-carry arbitrage*).

Powstaje naturalne pytanie: Jak długo inwestor będzie miał możliwość generowania zysku bez ryzyka? Oczywiście do momentu, gdy kontrakt futures będzie przewartościowany w stosunku do akcji. Gdybyśmy przeprowadzili powyższe rozumowanie, dla niższych kursów kontraktów futures, to okazałoby się, że możliwość arbitrażu ustaje, gdy kurs kontraktu wynosi 50,25 zł.

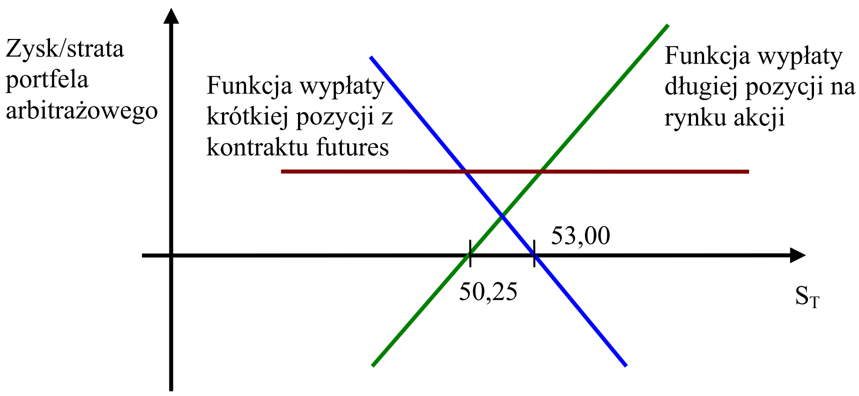
Podsumowując, arbitraż będzie możliwy, jeśli kontrakt futures będzie przewartościowany czyli, gdy zachodzi nierówność

$$m*S_t*(1+r*(T-t)) < F_{t,T} \qquad (1)$$

gdzie:
$F_{t,T}$ – cena kontraktu futures w chwili t, zapadającego w chwili T,
S_t – cena akcji w chwili t,
m – mnożnik kontraktu (liczba akcji przypadająca na kontrakt futures);
r – stopa (kredytu) wolna od ryzyka,
T-t – czas ‘życia’ portfela arbitrażowego.

Zobaczmy jak wygląda przedstawienie graficzne portfela arbitrażysty.

Rys. 1. Zysk/strata inwestora przy długim arbitrażu



Na rys. 1, różnica pomiędzy kursem kontraktu 53 zł a wartością przyszłą ceny akcji 50*(1+0,06*1/12) = 50,25 zł stanowi zysk arbitrażowy przypadający na jedną akcję. Gdy uwzględnimy mnożnik 200 będziemy mieć wielkość zysku arbitrażowego. Rysunek potwierdza, że zysk ten jest stały.

Przeanalizujmy teraz sytuację, gdy kontrakt futures jest niedowartościowany w stosunku do notowanej akcji.

<u>Sytuacja 1b (rynek doskonały)</u>
Załóżmy teraz, że kontrakt kosztuje 49 zł, a akcja 50 zł.
Co robi racjonalny inwestor? Powinien:

- dokonać krótkiej sprzedaży 200 akcji za 50 zł; dostanie 10 000 zł
- ulokować 10 000 zł w instrumencie wolnym od ryzyka na 6% w skali roku (może to być bon skarbowy zapadający za miesiąc);
- kupić kontrakt futures za 49 zł.

Depozytem zabezpieczającym dla długiej pozycji w kontrakcie może być bon skarbowy.

W chwili wygaśnięcia kontraktu futures inwestor zamyka pozycje w portfelu. Załóżmy dwa scenariusze cenowe akcji:

1. akcja kosztuje 60 zł; inwestor:
   - zamyka inwestycję w instrumencie wolnym od ryzyka; daje mu ona 10 000*(1+0,06*1/12) = 10 050 zł;
   - rozlicza kontrakt futures: 200*(60 – 49) = 2 200 zł;
   - kupuje 200 akcji za 60 zł i je oddaje
   - ma zysk w wysokości: 10 050 + 2 200 – 12 000 = 250 zł
2. akcja kosztuje 40 zł; inwestor:
   - zamyka inwestycję w instrumencie wolnym od ryzyka; daje mu ona 10000*(1+0,06*1/12) = 10 050 zł;
   - rozlicza kontrakt futures: 200*(40 – 49) = -1 800 zł;
   - kupuje 200 akcji za 40 zł i je oddaje;
   - ma zysk w wysokości: 10 050 – 1 800 – 8 000 = 250 zł.

Zauważmy, że inwestor znów zrealizuje zysk bez ryzyka (bez względu na to, jaki scenariusz zrealizuje rynek) w stałej wysokości 250 zł.

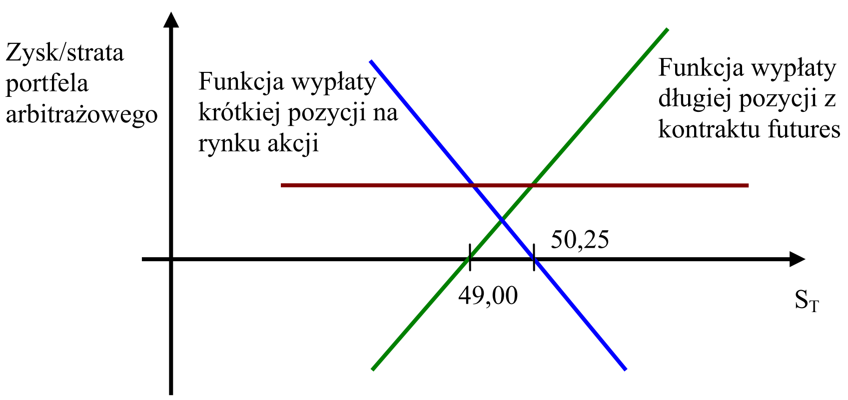
W tym przypadku, cena kontraktu futures była za niska w stosunku do notowanej akcji. Dlatego inwestor zajął długą pozycję w tańszym instrumencie (kontrakt futures), a krótką w droższym (akcja). Taką strategię arbitrażową nazywamy krótkim arbitrażem (*reverse cash-and-carry arbitrage*).

Zatem, krótki arbitraż będzie możliwy wtedy, gdy tylko kontrakt futures jest niedowartościowany czyli, gdy zachodzi nierówność

$$F_{t,T} < m*S_t*(1+r*(T-t)) \qquad (2)$$

gdzie oznaczenia są takie jak we wzorze (1).

Rys. 2. Zysk/strata inwestora przy krótkim arbitrażu



Różnica pomiędzy wartością przyszłą ceny akcji 50*(1+0,06*1/12) = 50,25 zł, a kursem kontraktu 49 zł stanowi zysk arbitrażowy przypadający na jedną akcję. Gdy uwzględnimy mnożnik 200 będziemy mieć wielkość zysku arbitrażowego.

Porównując nierówności (1) i (2) widzimy, że ceną graniczną, dla której nie ma możliwości arbitrażu jest równość ceny futures i wartości przyszłej ceny spot

$$F_{t,T} = m*S_t*(1+r*(T-t)) \qquad (3)$$

Zatem jeśli w zależności (3) nie ma równości, to na rynku doskonałym istnieje możliwość arbitrażu. Cenę futures $F_{t,T}$ w równaniu (3) nazywamy ceną *fair*.
Powyższe rozumowanie prowadziliśmy dla modelu kapitalizacji dyskretnej, ponieważ rynek finansowy w takiej kapitalizacji pracuje. W rozważaniach teoretycznych można spotkać modele kapitalizacji ciągłej, które zdecydowanie łatwiej przekształcać.
Zależność pomiędzy ceną futures i ceną spot (gotówkową) może być rozważana w terminach **kosztów posiadania** (*cost of carry*)[2]. Model kosztów posiadania w istocie służy wycenie kontraktów *forward*. W związku z tym, aby wycenić kontrakt *futures,* zakłada się, że cena *forward* jest równa cenie *futures*[3]. Jest to prawdą, gdy stopy procentowe nie zmieniają się w sposób stochastyczny. Jeśli stopy procentowe zmieniają się stochastycznie to ceny *forward* i ceny *futures* mogą się różnić[4].

1.2. Rynek z kosztami transakcji (akcje)

Prześledźmy powyższy przykład w sytuacji rynku rzeczywistego, czyli gdy mamy koszty transakcji. Załóżmy, że inwestor ma rachunek internetowy (niższe koszty transakcji), a prowizje w jego biurze są następujące (oznaczmy te koszty transakcji przez KT1):
0,40% wartości transakcji na rynku kasowym (prowizja liniowa),
12 zł otwarcie pozycji w kontrakcie futures,
8 zł wygaśnięcie kontraktu futures.
Załóżmy, że inwestor może lokować i pożyczać środki po tej samej stopie równej 6% w skali roku oraz że spread na rynku akcji i kontraktów wynosi 0, czyli może zajmować długą i krótką pozycję po tej samej cenie.

<u>Sytuacja 2a (rynek rzeczywisty z kosztami transakcji) – długi arbitraż</u>
Załóżmy, że akcja kosztuje 50 zł, a kontrakt futures 53 zł. Mnożnik kontraktu futures wynosi 200.
Co robi arbitrażysta? Otóż powinien:
- pożyczyć w banku kwotę 10 052 zł na kupno 200 akcji i na koszty transakcji;
- kupić 200 akcji spółki A za 50 zł (10 000 zł + 40 zł koszty transakcji),
- sprzedać 0,996 kontraktu futures (zająć krótką pozycję w kontrakcie futures) za 53 zł. Prowizja od transakcji wyniesie 11,95 zł (bo 0,996 kontraktu futures).

W chwili wygaśnięcia kontraktu futures zamyka pozycje w portfelu.
Załóżmy dwa możliwe scenariusze cenowe akcji w dniu wygaśnięcia:
1. akcja kosztuje 60 zł; inwestor:
   - sprzedaje 200 akcji za 60 zł, czyli ma 12 000 – 48 zł = 11 952zł ;
   - oddaje pożyczkę w banku wraz z odsetkami, czyli 10 052*(1+0,06*1/12) = 10 102,21 zł
   - rozlicza kontrakt futures: 0,996*200*(53-60) zł = -1 394,4 zł. Prowizja od wygaśnięcia kontraktu 7,97 zł;
   - ma zysk w wysokości: 11 952 – 10 102,21 – 1 394,40 – 7,97 = 447,42 zł
2. akcja kosztuje 40 zł; inwestor:
   - rozlicza kontrakt futures: 0,996*200*(53-40) zł = 2 589,60 zł. Prowizja od wygaśnięcia kontraktu 7,97 zł;

---
[2] R. W. Kolb, *Wszystko o instrumentach pochodnych,* WIG Press, Warszawa 1997.
[3] F. Black, The Pricing of Commodity Contracts, J*ournal of Financial Economics,* 3, pp.67-179, 1976.
[4] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, The Relation Between Forward Prices and Futures Prices, *Journal of Financial Economics,* 9, pp. 321-346, 1981.

- sprzedaje 200 akcji za 40 zł, czyli ma 8 000 – 32 zł = 7 968 zł;
- oddaje pożyczkę w banku wraz z odsetkami, czyli 10 052*(1+0,06*1/12) = 10 102,21 zł;
- ma zysk w wysokości: 2 589,60 + 7 968 – 10 102,21 – 7,97 = 447,42 zł.

W naszym rozumowaniu, pojawiły się ułamkowe części kontraktu futures. Wynikają one z kosztów transakcji na rynku kasowym. Aby był możliwy idealny arbitraż tak, by wartość pozycji na rynku spot była równa pozycji na rynku terminowym, musimy sprzedawać 1 - 0,4% = 1 – 0,004 = 0,996 kontraktu futures. Oczywiście, w rzeczywistości nie możemy zajmować pozycji w ułamkowych częściach kontraktu. Aby ta sytuacja odpowiadała realiom, zawsze możemy rozważyć wielokrotność zajmowanych pozycji. Czyli w rozważanym przypadku byłoby to kupno 200 tys. akcji i sprzedaż 996 kontraktów.

Podobnie, jak wcześniej zakładamy, że inwestor w czasie, gdy miał otwartą pozycję nie był wzywany do uzupełnienia depozytu, a rozliczenie kontraktu jest gotówkowe, a nie z dostawą fizyczną akcji. Jak można było przewidzieć, teraz zysk arbitrażowy jest mniejszy ze względu na koszty transakcji.

Jak długo inwestor będzie miał możliwość generowania zysku bez ryzyka? Z przeprowadzonego rozumowania widać, że dopóki kurs kontraktu futures będzie wyższy niż 50,75 zł, to będzie istniała możliwość arbitrażu.
Podsumowując, długi arbitraż będzie możliwy, jeśli

$$(m*S_t*(1+k_S) + (1 - k_s)*k_F)*(1 + r*(T-t)) + (1-k_S)*k_w < (1-k_S)*F_{t,T} \qquad (4)$$

gdzie oznaczenia jak wcześniej i dodatkowo:
k_S – koszty transakcji na rynku kasowym;
k_F – koszty otwarcia pozycji w kontrakcie futures;
k_w – koszty wygaśnięcia kontraktu futures.

Zauważmy, że koszty transakcji w istotny sposób wpłynęły na możliwość długiego arbitrażu. Na rynku bez kosztów transakcji cena graniczna kontraktu to 50,25 zł, natomiast, gdy musimy uwzględnić koszty transakcji cena graniczna wynosi 50,75 zł.
Zauważmy również, że w przypadku kosztów transakcji inwestor nie sprzedaje 1 kontraktu tylko pewną jego część określoną przez wysokość kosztów transakcji na rynku kasowym (prawa strona nierówności (4)).

<u>Sytuacja 2b (rynek rzeczywisty z kosztami transakcji) – krótki arbitraż</u>
Załóżmy, że akcja kosztuje 50 zł, a kontrakt futures 49 zł. Mnożnik kontraktu futures wynosi 200.
Co robi arbitrażysta? Otóż powinien:

- sprzedać 200 akcji spółki A po 50 zł (10 000 zł - 40 zł koszty transakcji);
- kupić 1,004 kontraktu futures. Prowizja od transakcji wyniesie 12,05 zł (bo 1,004 kontraktu futures).
- ulokować 10 000 – 40 – 12,05 = 9 947,95 zł w instrumencie wolnym od ryzyka.

W chwili wygaśnięcia kontraktu futures zamyka pozycje w portfelu.
Załóżmy dwa możliwe scenariusze cenowe akcji:

1. akcja kosztuje 60 zł; inwestor:
   - zamyka inwestycję w instrumencie wolnym od ryzyka: 9 947,95*(1+0,06*1/12)=9 997,69 zł;
   - kupuje 200 akcji za 60 zł, czyli wydaje 12 000 + 48 zł = 12 048zł;
   - rozlicza 1,004 kontraktu futures: 1,004*200*(60-49) zł = 2 208,80 zł. Prowizja od wygaśnięcia kontraktu wyniesie 8,03 (bo 1,004 kontraktu futures).
   - ma zysk w wysokości: 9 997,69 + 2 208,80 – 12 048 – 8,03 = 150,46 zł.
2. akcja kosztuje 40 zł; inwestor:

- zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka: 9 947,952*(1+0,06*1/12)=9 997,69 zł;
- kupuje 200 akcji za 40 zł, czyli wydaje 8 000 + 32 zł = 8 032zł ;
- rozlicza 1,004 kontraktu futures: 1,004*200*(40-49) zł = - 1 807,20 zł. Prowizja od wygaśnięcia kontraktu wyniesie 8,03 (bo 1,004 kontraktu futures).
- ma zysk w wysokości: 9 997,69 – 1 807,20 – 8 032 – 8,03 = 150,46 zł.

Podobnie jak w przypadku długiego arbitrażu pojawiają się ułamkowe części kontraktu. Aby był możliwy idealny arbitraż, inwestor musi kupić 1 + 0,4% = 1 + 0,004 = 1,004 kontraktu.
Zauważmy, że bez względu na to, jaki scenariusz zostanie zrealizowany na rynku akcji, a dokładnie, na jakim poziomie zamknie się rynek akcji w dniu wygaśnięcia kontraktu, zawsze będzie miał zysk. Dopóki cena kontraktu futures będzie mniejsza niż 49,75 zł, to będzie istniała możliwość arbitrażu.

Ogólnie krótki arbitraż będzie możliwy, gdy zachodzi nierówność

$$(1+k_S)*F_{t,T} < (m*S_t*(1-k_S) - (1+k_s)*k_F)*(1+r*(T-t)) – (1+k_S)*k_w \qquad (5)$$

W przypadku krótkiego arbitrażu również cena futures, dla której jest możliwy arbitraż różni się w przypadku kosztów transakcji i rynku bez kosztów transakcji.
Zauważmy, że koszty transakcji powodują, że graniczne ceny futures wyznaczają przedział wokół ceny fair, gdy nie ma kosztów transakcji. Co więcej, przedział ten jest symetryczny. W rozważanym przypadku cena fair kontraktu wynosiła 50,25 zł, a dolne ograniczenie wynosi 49,75 zł, natomiast górne 50,75 zł.

Jeśli zestawimy nierówności (5) oraz (4) to otrzymamy wstęgę arbitrażową

$$(1+k_S)*F_{t,T} < (m*S_t*(1-k_S) - (1+k_s)*k_F)*(1+r*(T-t)) - (1+ k_S)*k_w \qquad (6a)$$

$$< (m*S_t*(1+k_S) + (1-k_s)*k_F)*(1+r*(T-t)) + (1-k_S)*k_w < (1-k_S)*F_{t,T} \qquad (6b)$$

Jeżeli zatem cena kontraktu spełnia zależność (6a) racjonalny inwestor powinien zająć długą pozycję na rynku terminowym i krótką na rynku kasowym (krótki arbitraż), a gdy spełniona jest zależność (6b) to powinien zająć krótką pozycję na rynku terminowym a długą na rynku kasowym (długi arbitraż).

Jeśli natomiast cena futures F(t, T) leży we wstędze arbitrażowej, czyli spełnia zależność

$$(m*S_t*(1-k_S) - (1+k_s)*k_F)*(1+r*(T-t)) – (1+k_S)*k_w$$

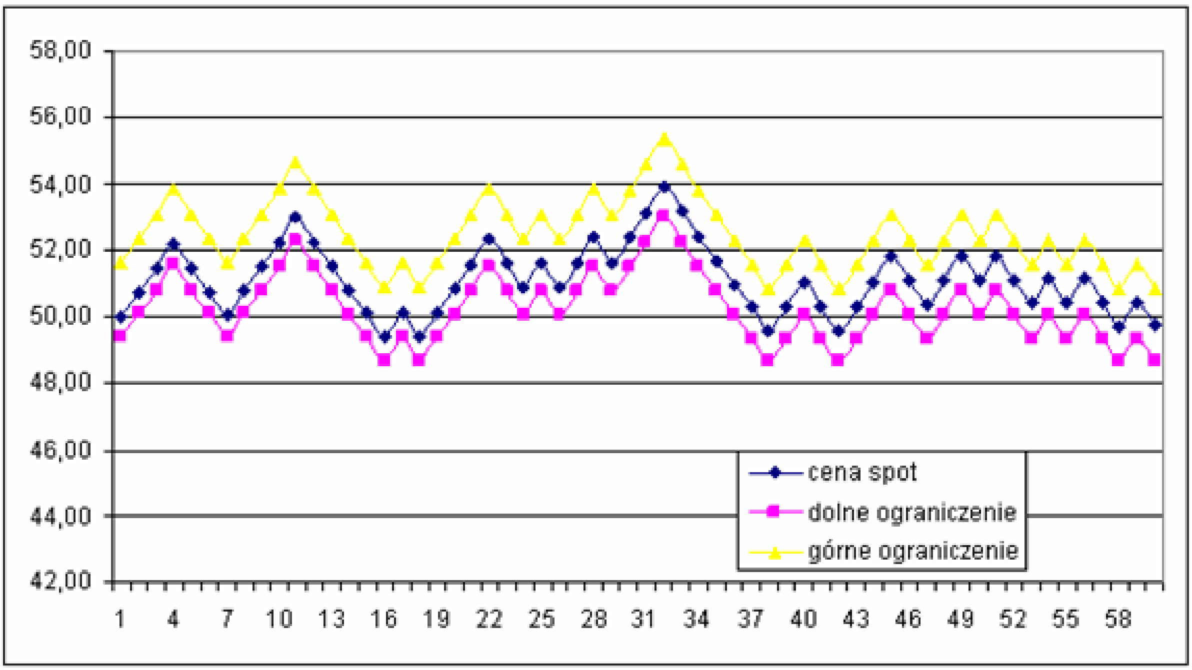
$$< F(t, T) < (m*S_t*(1+k_S) + (1-k_s)*k_F)* (1+r*(T-t)) + (1-k_S)*k_w$$

to nie ma możliwości arbitrażu na rynku.

W rozważanych przypadkach założyliśmy, że spread pomiędzy ofertą sprzedaży a ofertą kupna wynosi 0, co w przypadku płynnych aktywów nie jest dużym nadużyciem. Gdybyśmy chcieli dodatkowo uwzględnić fakt, że kupujemy aktywa po ofertach sprzedaży a sprzedajemy po ofertach kupna to wstęga arbitrażowa byłaby jeszcze szersza. Zatem możliwości arbitrażu jeszcze by się zmniejszyły.

Przykładowe trajektorie procesu cen akcji (niebieska krzywa) przedstawiamy na rys. 3. Podano również dolne (różowa krzywa) i górne (żółta krzywa) ograniczenia wyznaczające wstęgę arbitrażową.

Rys. 3. Przykładowa trajektoria procesu cen akcji wraz z dolnym i górnym ograniczeniem arbitrażowym na cenę kontraktu futures wynikającym z kosztów transakcji (symulacja startująca 60 dni przed wygaśnięciem kontraktu).



Gdy cena futures $F_{t,T}$ jest pomiędzy dolnym a górnym ograniczeniem to nie jest możliwy arbitraż pomiędzy rynkiem kasowym a rynkiem terminowym.
Zauważmy, że jeśli cena futures jest poniżej dolnego ograniczenia to racjonalny inwestor powinien zająć długą pozycję w kontrakcie futures i równocześnie krótką w akcjach. Jeśli natomiast cena futures jest powyżej górnego ograniczenia, to arbitrażysta powinien zająć krótką pozycję w kontrakcie futures i równocześnie długa w akcjach.

Zauważmy również, że w dniu wygasania kontraktu, ograniczenia dolne ani górne nie zbiegają do ceny spot. Zajęcie pozycji arbitrażowej nawet w dniu wygaśnięcia kontraktu (gdy cena futures powinna być równa cenie spot) jest związane z kosztami transakcji.

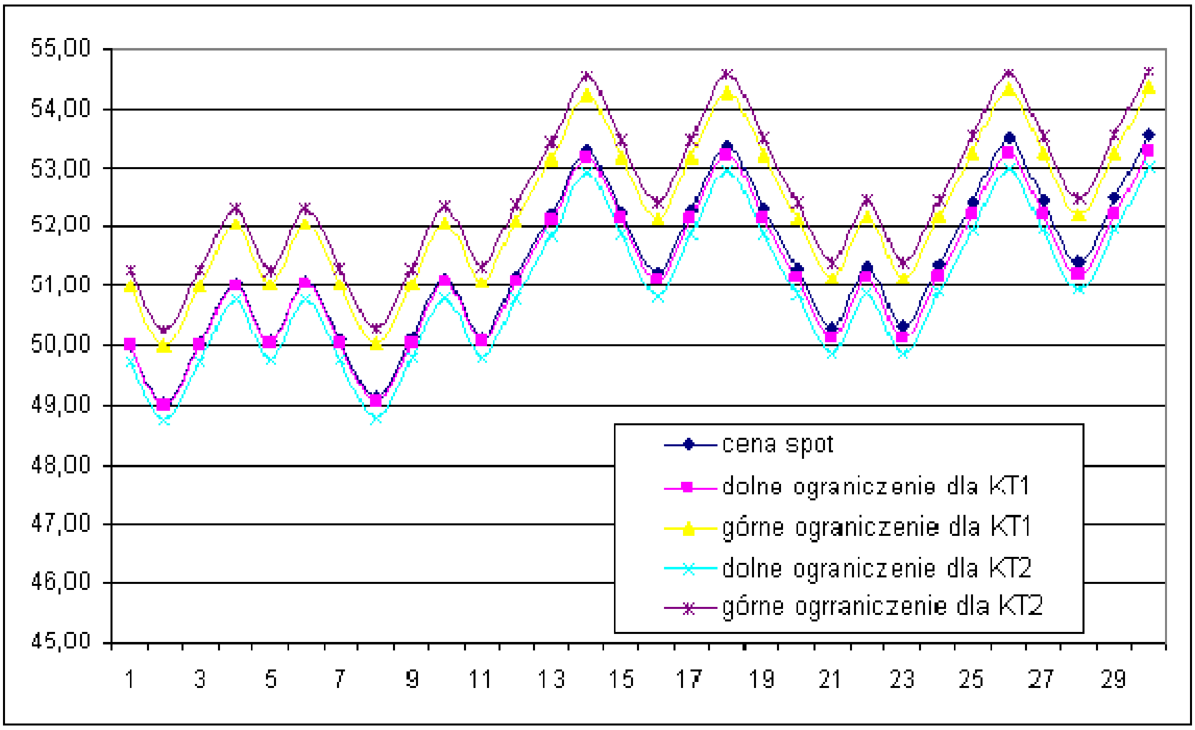
Zobaczmy, kto decyduje o szerokości wstęgi arbitrażowej? Załóżmy, że na rynku mamy innego inwestora, który ma następujące koszty transakcji KT2:

0,60% wartości transakcji na rynku kasowym (prowizja liniowa),
18 zł otwarcie pozycji w kontrakcie,
14 zł wygaśnięcie kontraktu.

Załóżmy, że akcja kosztuje 50 zł, a kontrakt kosztuje 51 zł. Wtedy nierówność (6b) nie jest spełniona dla inwestora o kosztach KT2. Przy jego kosztach transakcji długi arbitraż generuje stratę w wysokości 3,48 zł, natomiast inwestor o kosztach transakcji na poziomie KT1, uzyskuje z portfela arbitrażowego zysk w wysokości 48,99 zł.
Podobna sytuacja wystąpi przy krótkim arbitrażu. Załóżmy, że teraz cena futures wynosi 49,60. Inwestor o kosztach transakcji KT2, tworząc portfel arbitrażowy będzie miał stratę w wysokości 16,02 zł. Natomiast inwestor o kosztach transakcji KT1 będzie miał zysk w wysokości 30,01 zł.

Zatem szerokość wstęgi arbitrażowej jest wyznaczona przez inwestorów o najniższych kosztach transakcji na rynku. Przykładową trajektorię ceny akcji wraz ze wstęgami arbitrażowymi dla inwestorów o kosztach transakcji KT1 oraz KT2 przedstawia rys. 4.

Rys.4. Wstęgi arbitrażowe dla inwestorów o kosztach transakcji KT1 oraz KT2.



1.3. Możliwości arbitrażu na GPW (akcje)

Zobaczmy, czy na GPW w Warszawie istnieją możliwości arbitrażu. Rozważmy kilka wybranych losowo spółek i weźmy pod uwagę inwestorów o kosztach transakcji KT1 oraz KT2.

Długi arbitraż
W dniu 22 marca 2004 roku na zamknięcie notowań ciągłych akcje TPSA kosztowały 15,80 zł, natomiast czerwcowy kontrakt zamknął się na poziomie 16,15 zł. Cena kontraktu futures jest wyższa od ceny spot akcji, zatem rozważamy nierówność (4) i dostajemy:
dla lewej strony nierówności (przy kosztach transakcji KT1):

$$(m*S_t*(1+k_S) + (1-k_s)*k_F)*(1+r*(T-t)) + (1-k_S)*k_w = 8\,054{,}69 \text{ zł}$$

a dla prawej strony nierówności

$$(1-k_S)*F_{t,T} = 0{,}9960*16{,}15*500 = 8\,042{,}70 \text{ zł}$$

zatem nie możemy przeprowadzić arbitrażu dla inwestora o kosztach transakcji KT1. Tym bardziej inwestor o wyższych kosztach KT2 nie będzie mógł przeprowadzić transakcji arbitrażowej.

W dniu 13 maja 2004 roku na zamknięcie notowań ciągłych akcje KGHM S.A. kosztowały 25,60 zł. Kontrakt czerwcowy zamknął się na poziomie 26,10 zł. Dla lewej strony nierówności (4) przy kosztach transakcji KT1 dostaniemy:

$$(m*S_t*(1+k_S) + (1-k_s)*k_F)*\ (1+r*(T-t)) + (1-k_S)*k_w = 12\,947{,}24 \text{ zł}$$

a dla prawej strony nierówności

$$(1-k_S)*F_{t,T} = 0{,}9960*26{,}10*500 = 12\,997{,}80 \text{ zł}$$

Nierówność (4) jest spełniona, zatem arbitraż jest możliwy. Zysk arbitrażowy inwestora wyniesie 50,56 zł.
Sprawdźmy, czy inwestor o kosztach KT2 może osiągnąć zysk arbitrażowy. Dla tego inwestora lewa strona nierówności (4) ma postać

$$(m*S_t*(1+k_S) + (1-k_s)*k_F)*(1+r*(T-t)) + (1-k_S)*k_w = 12\ 984{,}92 \text{ zł}$$

a prawa strona nierówności (4)

$$(1-k_S)*F_{t,T} = 0{,}9940*26{,}10*500= 12\ 971{,}70 \text{ zł}$$

Dla inwestora o kosztach transakcji KT2, nie ma zatem możliwości zysku arbitrażowego. Gdyby inwestor o kosztach KT2 zajął długą pozycję w akcjach, a krótką w kontrakcie futures, to miałby stratę w wysokości 13,22 zł.

Krótki arbitraż
W dniu 22 marca 2004 roku na zamknięcie notowań ciągłych, akcje Peako S.A. kosztowały 124 zł, natomiast kontrakt czerwcowy był notowany na poziomie 122,95 zł. Cena futures była niższa niż cena spot, zatem rozważymy nierówność (5). Weźmy inwestora o kosztach KT1. Dla lewej strony tej nierówności mamy

$$(1+k_S)*F_{t,T} = 1{,}004*122{,}95*100 = 12\ 344{,}18 \text{ zł}$$

natomiast prawa strona

$$(m*S_t*(1-k_S) - (1+k_s)*k_F)*(1+r*(T-t)) – (1+k_S)*k_w = 12\ 515{,}40 \text{ zł}$$

Zatem nierówność (5) jest spełniona i mamy możliwość arbitrażu. Zysk arbitrażowy dla inwestora o kosztach KT1 wyniesie 171,22. Bez względu na to, jaka będzie cena akcji Peako S.A. w dniu wygaśnięcia kontraktu czerwcowego, czy wzrośnie do np. 150 zł, czy spadnie do np. 110 zł, inwestor będzie miał zysk w wysokości 171,22 zł.
Co więcej, inwestor o kosztach KT2 tworząc portfel arbitrażowy może również mieć zysk w wysokości 109,25 zł.

W dniu 13 maja 2004 roku na zamknięcie notowań ciągłych akcja PKN Orlen wynosiła 27,00 zł. Cena futures kontraktu czerwcowego miała poziom 26,85 zł. Cena futures była niższa od ceny spot, zatem istniała możliwość krótkiego arbitrażu. Lewa strona nierówności (5) ma postać

$$(1+k_S)*F_{t,T} = 1{,}004*26{,}85*500 = 13\ 478{,}70 \text{ zł}$$

natomiast prawa strona tej nierówności ma postać:

$$(m*S_t*(1-k_S) - (1+k_s)*k_F)*(1+r*(T-t)) – (1+k_S)*k_w = 13\ 505{,}20 \text{ zł}$$

Zysk arbitrażowy inwestora o kosztach transakcji KT1 wyniesie 26,50 zł.
Dla tych samych cen na rynku, inwestor o kosztach KT2 nie będzie mógł przeprowadzić transakcji arbitrażowej. Gdyby zbudował taki sam portfel jak inwestor o kosztach KT1, jego strata wyniosłaby 39,63 zł.

Te kilka przykładów pokazuje, że na GPW są możliwe zyski arbitrażowe. Im niższe koszty transakcji tym zyski te są większe.

1.4. Rynek z kosztami transakcji (indeks giełdowy)

W przypadku indeksu giełdowego, jeśli na rynku nie ma kosztów transakcji to powtarzając wcześniejsze rozumowanie i uwzględniając wypłatę dywidendy przez spółki wchodzące w skład indeksu można wyznaczyć cenę futures kontraktu. Cena *fair* takiego kontraktu będzie wynosiła

$$F_{t,T} = m*S_t*(1+(r-q)*(T-t)) \qquad (7)$$

gdzie q jest stopą dywidendy indeksu.

Jeśli weźmiemy teraz pod uwagę rynek rzeczywisty musimy uwzględnić koszty transakcji. Aby wyznaczyć wstęgę arbitrażową, dokonamy podobnego rozumowania jak wcześniej.
Jeśli kontrakt futures będzie za drogi w stosunku do ceny *fair* to zajmiemy krótką pozycję w kontrakcie a długą w portfelu akcji wchodzących w skład indeksu. Prześledźmy taką sytuację na przykładzie.

<u>Sytuacja 3a (rynek rzeczywisty z kosztami transakcji) – długi arbitraż</u>
Załóżmy, że indeks WIG20 wynosi 1700 punktów na 2 miesiące przed wygaśnięciem kontraktu, a kontrakt futures na WIG20 jest kwotowany na poziomie 1750 punktów. Mnożnik kontraktu futures wynosi 10. Załóżmy, że stopa dywidendy q=1%, stopa wolna od ryzyka dla depozytów i kredytów jest na poziomie 6%, a koszty inwestora wynoszą KT1.
Co powinien zrobić arbitrażysta? Otóż:

- pożyczyć w banku kwotę 17079,95 zł na kupno koszyka akcji wchodzących w skład WIG20u i na koszty transakcji;
- kupić koszyk akcji wchodzących w skład indeksu za 17 000 zł. Prowizja od transakcji 68 zł;
- sprzedać 0,996 kontraktu futures (zająć krótką pozycję w kontrakcie futures) na indeks po kursie 1 750 zł. Prowizja od transakcji wyniesie 11,95 zł (bo 0,996 kontraktu futures).

W chwili wygaśnięcia kontraktu futures arbitrażysta zamyka pozycje w portfelu.
Załóżmy dwa możliwe scenariusze cenowe na rynku akcji:

1. indeks jest na poziomie 1900 punktów; inwestor:
   - zamyka pozycję na rynku kasowym, czyli sprzedaje koszyk akcji za 19000 zł, czyli ma 19 000 – 76 zł = 18 924 zł; (76 zł koszty transakcji);
   - oddaje pożyczkę w banku wraz z odsetkami, czyli 17 079,95*(1+(0,06-0,01)*2/12) = 17222,28 zł
   - rozlicza kontrakt futures: 0,996*10*(1750-1900) zł = -1 494 zł (koszty transakcji 7,97 zł);
   - ma zysk w wysokości: 18 924 – 17 222,28 – 1494 – 7,97 = 199,75 zł
2. indeks jest na poziomie 1550 punktów; inwestor:
   - rozlicza kontrakt futures: 0,996*10*(1750-1550) zł = 1 992 zł;
   - sprzedaje koszyk akcji za 15 500 zł, czyli ma 15 500 – 62 zł = 15 438 zł;
   - oddaje pożyczkę w banku wraz z odsetkami, czyli 17 079,95*(1+(0,06-0,01)*2/12) = 17222,28 zł;
   - ma zysk w wysokości: 1 992+15 438 – 17 222,28 – 7,97 = 199,75 zł.

Podobnie, jak wcześniej, zakładamy, że w czasie gdy miał otwartą pozycję nie był wzywany do uzupełnienia depozytu, a rozliczenie kontraktu jest gotówkowe, a nie z dostawą fizyczną akcji. Jak można było przewidzieć, teraz zysk arbitrażowy jest mniejszy ze względu na koszty transakcji.

Jak długo inwestor będzie miał możliwość generowania zysku bez ryzyka? Z przeprowadzonego rozumowanie widać, że dopóki cena kontraktu futures będzie większa niż 1729,95 zł, to będzie istniała możliwość arbitrażu.
Podsumowując, arbitraż będzie możliwy, jeśli

$$(m*S_t*(1+k_S) + (1-k_s)*k_F)*(1+(r-q)*(T-t)) + (1-k_s)*k_w < (1-k_S)*F_{t,T} \quad (8)$$

gdzie
k_S – koszty transakcji na rynku kasowym;
k_F – koszty otwarcia pozycji w kontrakcie futures;
k_w – koszty wygaśnięcia kontraktu futures
q- stopa dywidendy indeksu.

Przeanalizujmy odwrotną sytuację, gdy cena futures jest niższa niż cena na rynku kasowym.

<u>Sytuacja 3b (rynek rzeczywisty z kosztami transakcji) – krótki arbitraż</u>
Załóżmy, że indeks jest na poziomie 1700 punktów, a kontrakt futures na indeks jest kwotowany na poziomie 1690 punktów. Mnożnik kontraktu futures wynosi 10.
Co robi arbitrażysta? Otóż powinien:

- sprzedać koszyk akcji wchodzących w skład indeksu po 17 000 zł (68 zł koszty transakcji);
- kupić 1,004 kontraktu futures na indeks (koszty transakcji 12,05 zł) po kursie 1690;
- ulokować 17 000 - 68 – 12,05 = 16 919,95 zł w instrumencie wolnym od ryzyka.

W chwili wygaśnięcia kontraktu futures zamyka pozycje w portfelu. Załóżmy dwa scenariusze cenowe akcji:

1. indeks jest na poziomie 1850 punktów; inwestor:
   - zamyka inwestycję w instrumencie wolnym od ryzyka: 16919,95*(1+(0,06-0,01)*2/12)=17060,95 zł;
   - rozlicza 1,004 kontraktu futures: 1,004*10*(1850-1690) zł = 1606,40 zł;
   - kupuje koszyk akcji wchodzących w skład indeksu za 18500 zł, czyli wydaje 18 500 + 74 zł = 18 574zł ;
   - ma zysk w wysokości: 17060,95 + 1606,40 – 18 574 – 8,03 = 85,32 zł.
2. indeks jest na poziomie 1600 punktów; inwestor:
   - zamyka inwestycję w instrumencie wolnym od ryzyka: 16919,95*(1+(0,06-0,01)*2/12)=17060,95 zł;
   - kupuje koszyk akcji za 16 000 zł, czyli wydaje 16 000 + 64 zł = 16 064zł ;
   - rozlicza 1,004 kontraktu futures: 1,004*10*(1600-1690) zł = 903,60 zł;
   - ma zysk w wysokości: 17060,95 - 16064 – 903,6 – 8,03 = 85,32 zł.

Zatem bez względu na to, jaki scenariusz zostanie zrealizowany na rynku akcji zawsze będzie miał zysk w wysokości 85,32 zł. Dopóki cena kontraktu futures będzie mniejsza niż 1 698,50 zł, to będzie istniała możliwość arbitrażu.
Ogólnie arbitraż będzie możliwy gdy

$$(1+k_S)*F_{t,T} < (m*S_t*(1-k_S) - (1+k_s)*k_F)*(1+(r-q)*(T-t)) - (1+k_s)*k_w \quad (9)$$

Jeśli zestawimy nierówność (9) oraz (8) to otrzymamy wstęgę arbitrażową

$$(1+k_S)*F_{t,T} < (m*S_t*(1-k_S) - (1+k_s)*k_F)*(1+(r-q)*(T-t)) - (1+k_s)*k_w \quad (10a)$$

$$< (m*S_t*(1+k_S) + (1-k_s)*k_F)* (1+(r-q)*(T-t)) + (1-k_s)*k_w < (1-k_S)*F_{t,T} \quad (10b)$$

Czyli jeżeli cena kontraktu spełnia zależność (10a) racjonalny inwestor powinien zająć długą pozycję na rynku terminowym i krótką na rynku kasowym (krótki arbitraż), a gdy spełniona jest zależność (10b) to powinien zająć krótką pozycję na rynku terminowym a długą na rynku kasowym (długi arbitraż).

Jeśli natomiast cena futures F(t, T) spełnia zależność

$$(m*S_t*(1-k_S) - (1+k_s)*k_F)*(1+(r-q)*(T-t)) - (1+k_s)*k_w <$$

$$F(t, T) < (m*S_t*(1+k_S) + (1-k_s)*k_F)*(1+(r-q)*(T-t)) + (1-k_s)*k_w$$

to nie ma możliwości arbitrażu na rynku.
Zauważmy, że tak jak poprzednio o szerokości wstęgi arbitrażowej będzie decydował inwestor o najniższych kosztach transakcji. Prześledźmy takie sytuacje na rzeczywistych danych z GPW.

1.5. Możliwości arbitrażu na GPW (indeks WIG20)

Rozważmy notowania indeksu WIG20 z dnia 19 marca 2004 roku. W tym dniu WIG20 zamknął się na poziomie 1709,17, natomiast kontrakt czerwcowy 1752. Sprawdźmy nierówność (8), zakładając, że stopa dywidendy jest na poziomie 1%, a stopa wolna od ryzyka to 5,40%. Lewa strona nierówności (8) daje nam:

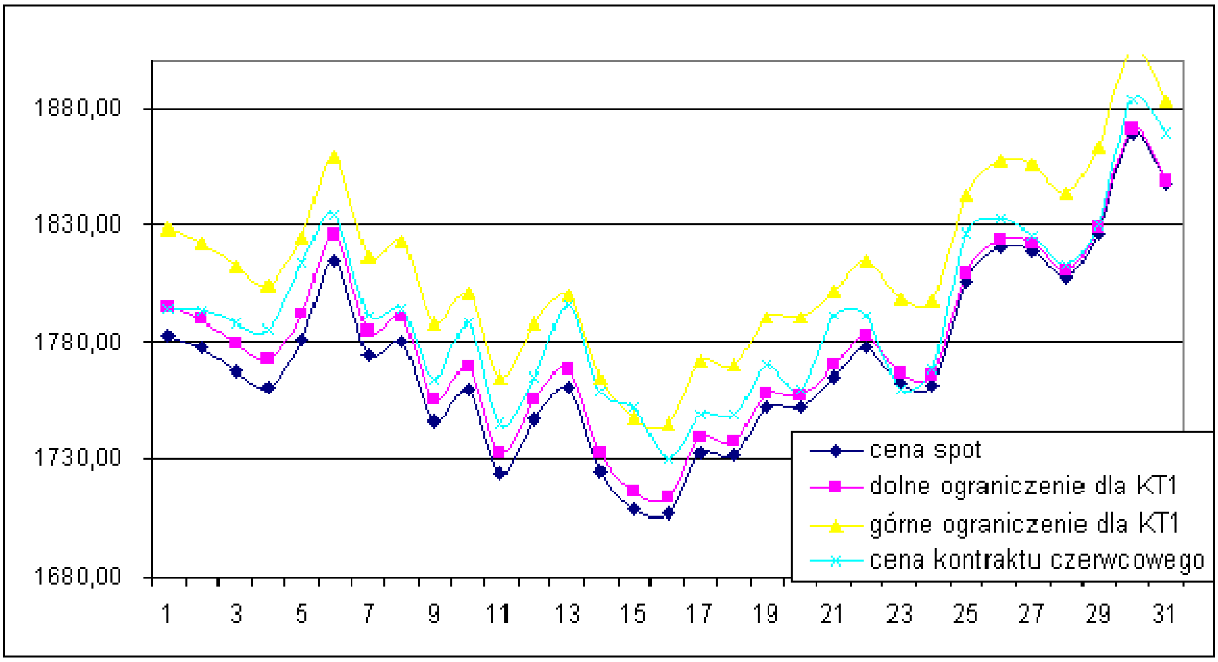
$$(m*S_t*(1+k_S) + (1-k_s)*k_F)* (1+(r-q)*(T-t)) + (1-k_s)*k_w = 17\,368{,}57 \text{ zł}$$

natomiast prawa strona tej równości

$$(1-k_S)*F_{t,T} = 17\,449{,}92 \text{ zł}$$

zatem inwestor o kosztach KT1 ma możliwość zajęcia pozycji arbitrażowej. Jego zysk arbitrażowy wyniesie 81,36 zł (punkt o współrzędnej 15 na osi x).

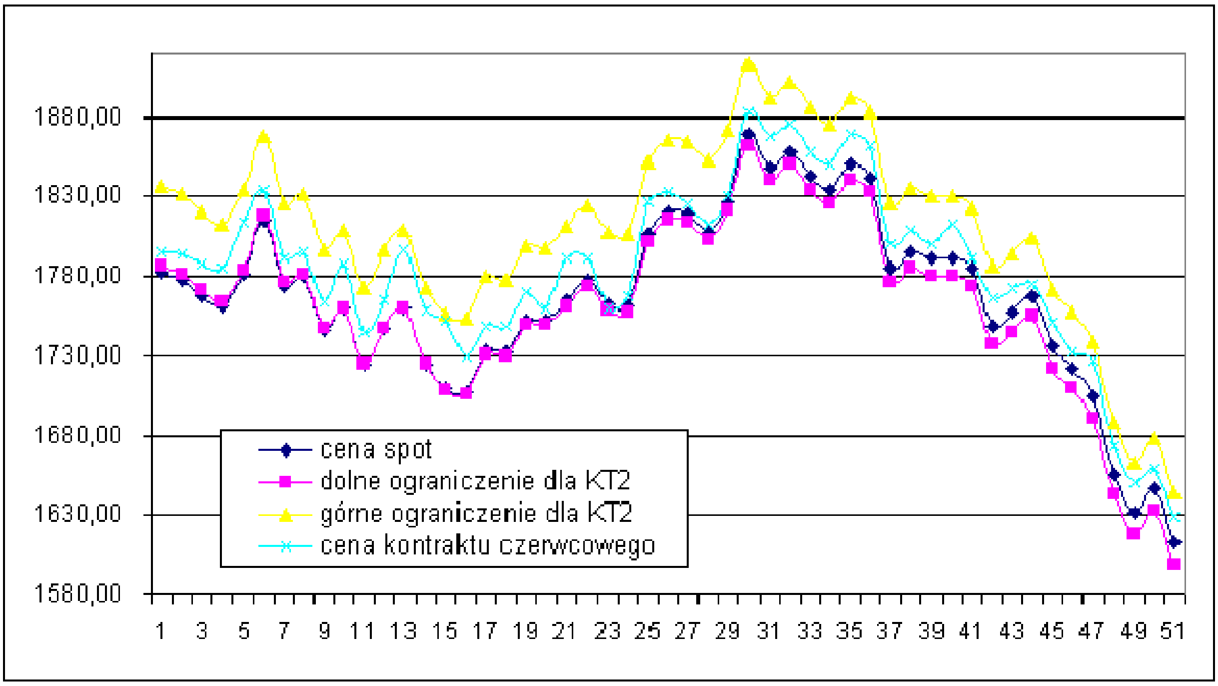
Rys. 5. Ceny zamknięcia indeksu WIG20, kontraktów czerwcowych oraz wstęga arbitrażowa dla inwestora o kosztach transakcji KT1 w okresie 1 marca – 14 kwietnia 2004 na GPW.



Po analizie rys. 5, widzimy, że możliwości zajęcia pozycji arbitrażowej na indeksie WIG20 i kontrakcie czerwcowym FW20M4 były bardzo ograniczone. A biorąc pod uwagę fakt, że zajęcie równocześnie pozycji we wszystkich 20 spółkach na rynku kasowym jest trudnym zadaniem, te możliwości jeszcze się kurczą.

Jeszcze mniejsze pole manewru ma inwestor o kosztach transakcji KT2 (rys. 6). Praktycznie, w okresie ponad 2 miesięcy, inwestor taki nie miał możliwości stworzenia portfela arbitrażowego, jeśli bierzemy pod uwagę ceny na zamknięcie.

Rys. 6. Ceny zamknięcia indeksu WIG20, kontraktów czerwcowych oraz wstęga arbitrażowa dla inwestora o kosztach transakcji KT2 w okresie 1 marca – 13 maja 2004 na GPW.



Podsumowując, tylko w nielicznych przypadkach i tylko dla niższych kosztów transakcji KT1 istniały możliwości arbitrażu.

Warto również podkreślić, że w rzeczywistości bardzo trudno jest kupić (sprzedać) jednocześnie (w określonym momencie) koszyk akcji odpowiadający indeksowi WIG20. Dlatego zdecydowanie łatwiej dokonywać takich transakcji na kontraktach MiniWIG20. Jednostki indeksowe pojawiły się w obrocie giełdowym na świecie na początku lat ’90 XX wieku. W styczniu 1993 roku pojawiły się na American Stock Exchange jednostki Standard and Poor’s Depository Receipts (SPDRs). Również na innych giełdach wprowadzono jednostki indeksowe, które z racji swojej konstrukcji mają replikować indeksy kwotowane na tych giełdach.

1.6. Rynek rzeczywisty (jednostki MiniWIG20)

Konstrukcja jednostki indeksowej MiniWIG20 ma z definicji replikować indeks WIG20. Jednostki nie są akcjami, nie dają więc prawa do dywidendy. Dlatego w zależnościach wcześniej rozważanych a dotyczących indeksu, stopa dywidendy $q = 0$.
Jeśli na rynku nie ma kosztów transakcji zależność pomiędzy ceną jednostki indeksowej MiniWIG20 S_t a ceną kontraktu futures $F_{t,T}$ jest następująca

$$F_{t,T} = M*S_t*(1+r*(T-t)) \qquad (11)$$

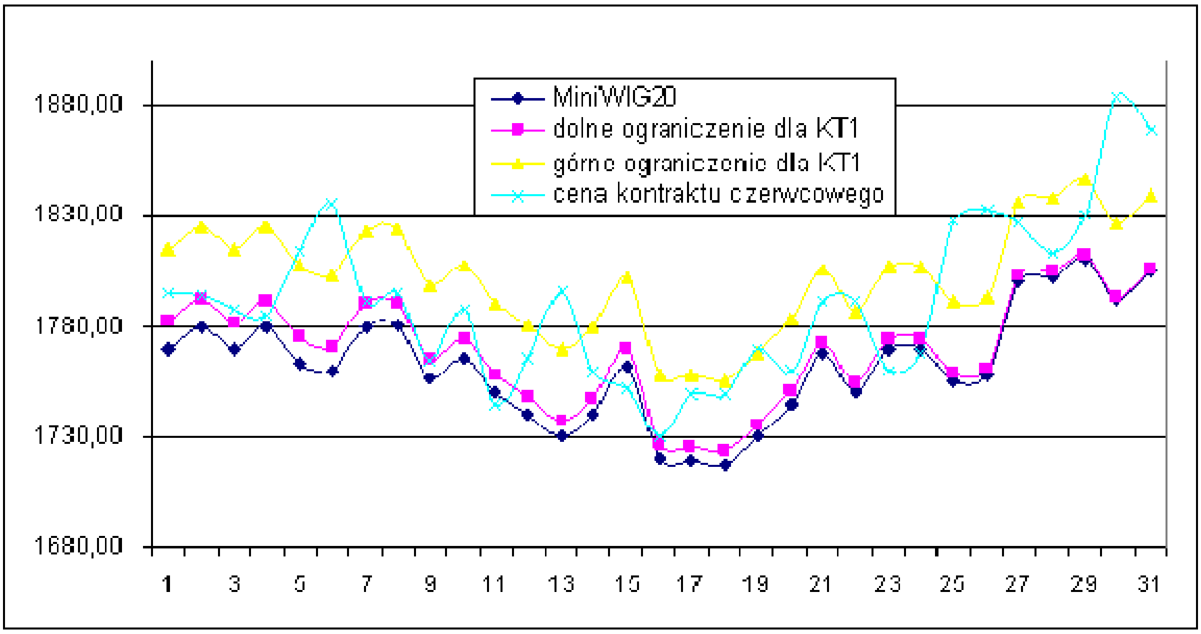
gdzie M = 100 jest mnożnikiem jednostki indeksowej MiniWIG.
W przypadku rynku z kosztami transakcji uzyskamy wstęgę arbitrażową, której dolne i górne ograniczenie będzie wynikało z zależności rozważanych wcześniej:

$$(1+k_S)*F_{t,T} < (M*S_t*(1-k_S) - (1+k_s)*k_F)*(1+r*(T-t)) - (1+k_s)*k_w \qquad (12a)$$

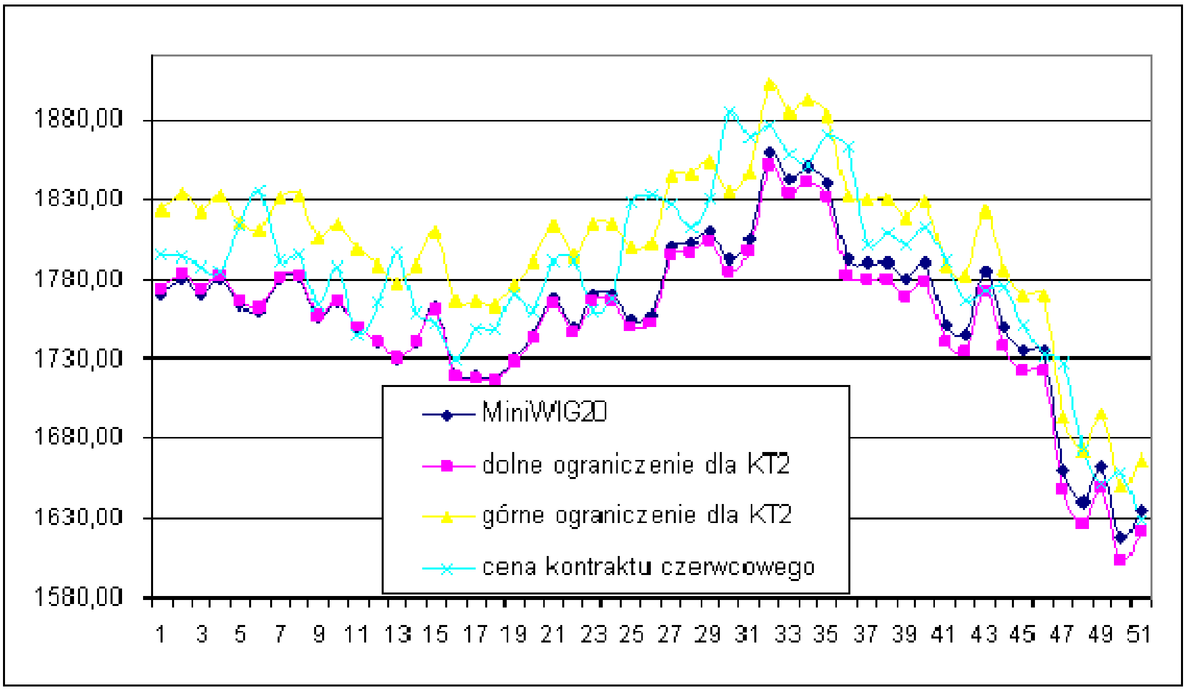
$$< (M*S_t*(1+k_S) + (1-k_s)*k_F)*(1+r*(T-t)) + (1-k_s)*k_w < (1-k_S)*F_{t,T} \qquad (12b)$$

Zajmowanie pozycji arbitrażowych w jednostkach indeksowych oraz kontraktach futures dawało znacznie lepsze rezultaty niż w koszyku akcji z indeksu WIG20 w rozważanym okresie czasu (rys. 7, rys. 8)

Rys. 7. Ceny zamknięcia jednostek indeksowych MiniWIG20 (przemnożone przez 10), kontraktów czerwcowych oraz wstęga arbitrażowa dla inwestora o kosztach transakcji KT1 w okresie 1 marca – 14 kwietnia 2004 na GPW.



Rys. 8. Ceny zamknięcia jednostek indeksowych MiniWIG20 (przemnożone przez 10), kontraktów czerwcowych oraz wstęga arbitrażowa dla inwestora o kosztach transakcji KT2 w okresie 1 marca – 13 maja 2004 na GPW.



Jedynym problemem dla inwestorów zajmujących pozycję w jednostkach indeksowych jest mała płynność jednostek. Wydaje się, że powodem niskiej płynności, a w konsekwencji małej liczby otwartych pozycji jest to, że zajmujący krótką pozycję w jednostkach może być wylosowany w dowolnej chwili trwania pozycji arbitrażowej, ponieważ kontrakt MiniWIG20 jest typu amerykańskiego. Do naszych rozważań przyjęliśmy, że inwestor zajmujący, krótką pozycję nie zostanie wylosowany w czasie, gdy posiada portfel arbitrażowy.

2. Transakcje arbitrażowe: rynek kasowy-rynek opcji

Skupimy się tylko na opcjach europejskich, czyli takich, które można wykonać (zrealizować) w dniu wygaśnięcia opcji. Pokażemy zależności, jakie powinny być spełnione pomiędzy ceną instrumentu bazowego (akcją, indeksem) a opcją na ten instrument, na rynku wolnym od arbitrażu. Pokażemy ograniczenia ceny opcji od góry i od dołu. Rozważania będziemy prowadzić dla akcji nie płacącej dywidendy. Rozumowanie będzie dokładnie takie samo dla indeksu giełdowego, przy założeniu, że mamy stopę dywidendy q.

2.1. Rynek doskonały (opcja kupna)

Rozważania nasze zacznijmy od przykładu. Zakładamy, że nie ma kosztów transakcji oraz, że na rynku można lokować i pożyczać środki po stopie wolnej od ryzyka r = 6% w skali roku.
Załóżmy, że na rynku jest kwotowana akcja nie płacąca dywidendy z ceną S_0 = 32 zł oraz opcja kupna na 10 akcji, z kursem wykonania X = 30 zł, wygasająca za 6 miesięcy T = 0,5 roku. Niech kurs opcji kupna wynosi 33 zł, zatem cena opcji wynosi C_0 = 330 zł (kurs opcji pomnożony przez liczbę akcji przypadającej na jedną opcję).
Co może zrobić racjonalny inwestor? Otóż powinien:

- wystawić opcję kupna z ceną 330 zł;
- kupić 10 akcji za 320 zł;
- ulokować 330 – 320 = 10 zł w instrumencie wolnym od ryzyka na okres 6 miesięcy.

W chwili wygaśnięcia kontraktu opcyjnego T możliwe są dwa scenariusze:

1. $S_T < X$ (np. $S_T = 25$ zł), opcja jest poza ceną i wygasa bez wartości:
    - z racji wygaśnięcia opcji, inwestor nie ma żadnego zobowiązania wobec nabywcy opcji;
    - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka, ma 10*(1+ 0,06*1/2) = 10,30 zł;
    - sprzedaje akcje za 10*25 =250 zł;
    - zysk inwestora wynosi: 10,30 + 250 = 260,30 zł.
2. $S_T \geq X$ (np. $S_T = 35$ zł), opcja jest w cenie, inwestor:
    - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka, ma 10*(1+ 0,06*1/2) = 10,30 zł;
    - sprzedaje akcje za 10*35 = 350 zł;
    - wypłaca nabywcy opcji różnicę $10*(S_T – X) = 10*(35 – 30) = 50$ zł;
    - zysk inwestora wynosi: 10,30 + 350 – 50 = 310,30 zł.

Zauważmy, że w obu scenariuszach inwestor ma zysk z portfela arbitrażowego. W pierwszym scenariuszu zysk zależy od ceny akcji na rynku kasowym – im niższa cena tym mniejszy zysk. W drugim scenariuszu, zysk jest stały i nie zależy od ceny akcji na rynku kasowym.

Zatem możemy poczynić pierwszą obserwację (ograniczenie na cenę opcji od góry):
cena opcji na akcję musi być mniejsza bądź równa cenie tej akcji:

$$C_t \leq m*S_t \qquad (13)$$

gdzie:

C_t cena europejskiej opcji kupna w chwili t,
S_t cena akcji w dowolnej chwili t (w szczególności w chwili t = 0),
m liczba akcji przypadająca na 1 opcję.

Gdyby nie zachodziła zależność (13) byłby możliwy arbitraż.
Załóżmy, że w chwili t zachodzi zależność

$$C_t > m*S_t$$

Zatem inwestor w chwili t wystawia opcję kupna za C_t i jednocześnie kupuje akcje za $m*S_t$ i różnicę

$$C_t - m*S_t > 0$$

inwestuje w instrument wolny od ryzyka.

W chwili wygaśnięcia kontraktu opcyjnego T możliwe są dwa scenariusze:
1. $S_T < X$ opcja jest poza ceną i wygasa bez wartości:
   - z racji wygaśnięcia opcji, inwestor nie ma żadnego zobowiązania wobec nabywcy opcji;
   - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka $(C_t - m*S_t)*(1+r*(T-t)) > 0$;
   - sprzedaje akcje za $m*S_T$;
   - zysk inwestora: $(C_t - m*S_t)*(1+r*(T-t)) + m*S_T$.
2. $S_T \geq X$ opcja jest poza ceną i inwestor realizuje swoje zobowiązanie wobec nabywcy:
   - inwestor zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka $(C_t - m*S_t)*(1+r*(T-t)) > 0$;
   - sprzedaje akcje za $m*S_T$;
   - wypłaca nabywcy opcji różnicę $m*(S_T – X)$;
   - zysk inwestora:

   $(C_t - m*S_t)*(1+r*(T-t)) + m*S_T – m*(S_T – X) = (C_t - m*S_t)*(1+r*(T-t)) + m*X > 0$.

Zobaczmy teraz, jakie są ograniczenia na cenę opcji od dołu.
Załóżmy, że na rynku jest notowana akcja nie płacąca dywidendy po $S_0 = 32$ zł. Dostępna jest również opcja kupna na 10 akcji, z kursem wykonania X = 30 zł, która wygasa za 6 miesięcy, T = 0,5. Opcja kosztuje $C_0 = 27$ zł.
Co może zrobić racjonalny inwestor? Otóż powinien:
- sprzedać krótko 10 akcji za 32 zł każda;
- zająć długą pozycję w opcji kupna za 27 zł;
- ulokować 320 – 27 = 293 zł w instrumencie wolnym od ryzyka na okres 6 miesięcy.

W chwili wygaśnięcia kontraktu opcyjnego T możliwe są dwa scenariusze:
1. $S_T < X$ zł (np. $S_T = 25$ zł), opcja jest poza ceną i wygasa bez wartości, inwestor:
   - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka, ma 293*(1+ 0,06*1/2) = 301,79 zł;
   - kupuje 10 akcji za $m*S_T = 250$ zł;
   - z racji wygaśnięcia opcji poza ceną, jego prawa są bez wartości;
   - zysk inwestora wynosi: 301,79 - 250 = 51,79 zł.
2. $S_T \geq X$ (np. $S_T = 35$ zł), opcja jest w cenie, inwestor:
   - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka, ma 293*(1+ 0,06*1/2) = 301,79 zł;
   - wykonuje swoje prawo (z racji długiej pozycji w opcji kupna), dostaje $m*(S_T – X) = 10*(35 – 30) = 50$ zł;
   - kupuje 10 akcji za $m*S_T = 350$ zł;
   - zysk inwestora wynosi: 301,79 + 50 – 350 = 1,79 zł.

Zauważmy, że w pierwszym scenariuszu zysk jest zmienny. Im niższa cena akcji w chwili wygaśnięcia opcji T na rynku kasowym tym większy zysk inwestora. W drugim przypadku natomiast zysk inwestora jest stały bez względu na cenę akcji S_T na rynku kasowym.

Spróbujmy przeprowadzić formalne rozumowanie.
Utwórzmy w chwili t = 0 dwa portfele A oraz B:

- portfel A – składający się z długiej pozycji w opcji kupna C_0 oraz pozycji w instrumencie wolnym od ryzyka w wysokości m*X/(1+r*(T-0)) (czyli wartości zdyskontowanej ceny wykonania opcji);
- portfel B – składający się z długiej pozycji w akcji $m*S_0$.

Zobaczmy teraz jak wygląda wypłata z takich portfeli w chwili T.

	Chwila obecna t=0	Data wykonania opcji t=T	
		$S_T \le X$	$S_T > X$
Portfel A:			
• Opcja kupna • Instrument wolny od ryzyka	C_0 m*X/(1+r*(T-t))	 m*X	$m*S_T$
Wartość portfela A	C_0 + m*X/(1+r*(T-t))	m*X	$m*S_T$
Portfel B:			
• Akcja	$m*S_0$	$m*S_T$	$m*S_T$
Wartość portfela B		$m*S_T$	$m*S_T$

Zauważmy, że w chwili t = T wartość
portfela A wynosi:

$$\max(m*S_T, m*X) = m*\max(S_T, X)$$

a portfela B:

$$m*S_T$$

gdzie max(a,b) oznacza większa z dwóch liczb a oraz b. Czyli jeśli a > b, to max(a,b) = a, w przeciwnym wypadku max(a,b) = b.

Zatem wartość portfela A jest zawsze większa bądź równa wartości portfela B w chwili T:

$$\text{wartość portfela } A_T \ge \text{wartość portfela } B_T$$

Jeśli jest to prawdą dla chwili T, to również nierówność ta jest prawdziwa dla dowolnej chwili t

$$\text{wartość portfela } A_t \ge \text{wartość portfela } B_t$$

i w szczególności dla t = 0

$$\text{wartość portfela } A_0 \ge \text{wartość portfela } B_0$$

Zatem w dowolnej chwili t mamy zależność pomiędzy wartościami portfela następującą

$$C_t + m*X/(1 + r*(T-t)) \ge m*S_t$$

czyli

$$C_t \ge m*(S_t - X/(1 + r*(T-t)))$$

W szczególności dla t = 0 mamy

$$C_0 + m*X/(1 + r*(T-0)) \ge m*S_0$$

i podobnie dla chwili t = 0

$$C_0 \geq m*(S_0 - X/(1 + r*(T-0)))$$

Wiemy, że zawsze $C_t \geq 0$. Zatem mamy zależność

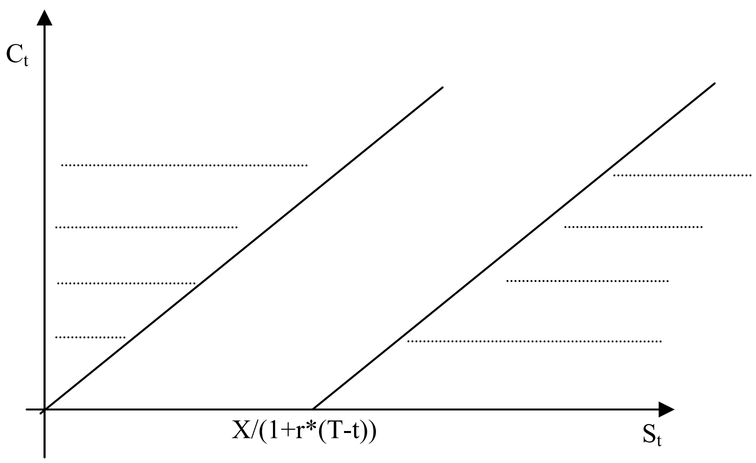
$$C_t \geq m*\max(S_t - X/(1 + r*(T-t)),0)$$

Łącząc ograniczenie od dołu i od góry na cenę opcji kupna uzyskamy zależność

$$m*\max(S_t - X/(1 + r*(T-t)),0) \leq C_t \leq S_t \qquad (14)$$

Jeśli cena opcji jest ograniczona od dołu i od góry jak w zależności (14), to na rynku bez kosztów transakcji nie ma możliwości arbitrażu. Zależność (14) można przedstawić graficznie (rys. 9).

Rys. 9. Ograniczenia na cenę opcji kupna jako funkcja ceny akcji
(obszar zakreskowany oznacza możliwość arbitrażu)



2.2. Rynek z kosztami transakcji (opcja kupna)

Powróćmy do naszego przykładu. Zakładamy teraz, że na rynku mamy koszty transakcji. Niech koszty otwarcia pozycji w kontrakcie opcyjnym wynoszą 2,5% ceny opcji, jednak nie mniej niż 2 zł i nie więcej niż 15 zł, natomiast na rynku kasowym otwarcie/zamknięcie pozycji to 0,40% wartości transakcji.
Mamy zatem, na rynku akcję nie płacąca dywidendy z ceną $S_0 = 32$ zł oraz opcję kupna na 10 akcji, z kursem wykonania X = 30 zł, wygasająca za 6 miesięcy T = 0,5 roku. Cena opcji wynosi $C_0 = 330$ zł. Na rynku można lokować i pożyczać środki po stopie wolnej od ryzyka r=6% w skali roku.

Co może zrobić racjonalny inwestor? Otóż powinien:

- wystawić opcję kupna z ceną 330 zł, koszty tej transakcji to 0,025*330 = 8,25 zł;
- kupić 10 akcji za 320 zł, koszty transakcyjne to 0,004*320 = 1,28 zł;
- ulokować 330 – 320 – 8,25 – 1,28 = 0,47 zł w instrumencie wolnym od ryzyka na okres 6 miesięcy.

W chwili wygaśnięcia kontraktu opcyjnego T możliwe są dwa scenariusze:
1. $S_T < X$ (np. $S_T = 25$ zł), opcja jest poza ceną i wygasa bez wartości:

- z racji wygaśnięcia opcji, inwestor nie ma żadnego zobowiązania wobec nabywcy opcji;
- zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka, ma 0,47*(1+ 0,06*1/2) = 0,48 zł;
- sprzedaje akcje za 250 zł, koszty transakcji 0,004*250 = 1 zł;

- zysk inwestora wynosi: 0,48 + 250 – 1 = 249,52 zł.

2. $S_T \geq X$ (np. $S_T = 35$ zł), opcja jest w cenie, inwestor:
    - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka, ma 0,47*(1+ 0,06*1/2) = 0,48 zł;
    - sprzedaje akcje za 350 zł, koszty transakcji 0,004*350 = 1,40 zł;
    - wypłaca nabywcy opcji różnicę $m*(S_T – X)$ = 10*(35 – 30) = 50 zł;
    - zysk inwestora wynosi: 0,48 + 350 – 50 – 1,40 = 299,08 zł.

Zauważmy, że w obu scenariuszach inwestor ma zysk z portfela arbitrażowego, pomimo występowania kosztów transakcji na rynku kasowym i opcji. W pierwszym scenariuszu zysk zależy od ceny akcji na rynku kasowym – im niższa cena tym mniejszy zysk. W drugim scenariuszu, zysk jest stały i nie zależy od ceny akcji na rynku kasowym.

Ogólnie, zależność arbitrażowa z kosztami transakcji w dowolnej chwili t będzie miała postać

$$0 \leq m*S_t - (1+k_C)*C_t \qquad (15)$$

gdzie: k_S - koszty na rynku kasowym,
k_C - koszty opcji call,
m - mnożnik.

Zakładamy, że koszty wygaśnięcia opcji, bez względu na to czy jest w cenie czy poza ceną, są zerowe. Zauważmy, że nie znamy ceny akcji S_T w chwili wygaśnięcia kontraktu opcyjnego, gdy tworzymy portfel arbitrażowy. Zatem nie możemy określić, jakie będą koszty zamknięcia naszej pozycji k_S*m*S_T na rynku kasowym w chwili T. Gdybyśmy założyli, że koszty zamknięcia pozycji na rynku kasowym $k_S*m*S_T = k_S'$ są stałe, to nierówność (15) określałaby nam ograniczenie od góry na cenę opcji.

Zobaczmy teraz, jak wygląda ograniczenie ceny opcji od dołu przy kosztach transakcji.
Załóżmy, że na rynku jest notowana akcja nie płacąca dywidendy po $S_0 = 32$ zł. Dostępna jest również opcja kupna na 10 akcji, z kursem wykonania 30 zł, która wygasa za 6 miesięcy, T = 0,5. Opcja kosztuje $C_0 = 27$ zł.
Co może zrobić racjonalny inwestor? Otóż powinien:
- sprzedać krótko 10 akcji za 32 zł każda, koszty transakcji 1,28 zł;
- zająć długą pozycję w opcji kupna za 27 zł, koszty transakcji 2 zł;
- ulokować 320 – 1,28 – 27 – 2 = 289,72 zł w instrumencie wolnym od ryzyka na okres 6 miesięcy.

W chwili wygaśnięcia kontraktu opcyjnego T możliwe są dwa scenariusze:
1. $S_T < X$ zł (np. $S_T = 25$ zł), opcja jest poza ceną i wygasa bez wartości, inwestor:
    - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka, ma 289,72*(1+ 0,06*1/2) = 298,41 zł;
    - kupuje 10 akcji za $m*S_T$ = 250 zł koszty transakcji 1 zł;
    - z racji wygaśnięcia opcji poza ceną, jego prawa są bez wartości;
    - zysk inwestora wynosi: 298,41 – 250 - 1 = 47,41 zł.
2. $S_T \geq X$ (np. $S_T = 35$ zł), opcja jest w cenie, inwestor:
    - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka, ma 289,72*(1+ 0,06*1/2) = 298,41 zł;
    - wykonuje swoje prawo (z racji długiej pozycji w opcji kupna), dostaje $m*(S_T – X)$ = 10*(35 – 30) = 50 zł;
    - kupuje 10 akcji za $m*S_T$ = 350 zł, koszty transakcji 1,40 zł;
    - zysk inwestora wynosi: 298,41 + 50 – 350 – 1,40 = - 2,99 zł, czyli inwestor zrealizował stratę.

Czyli widzimy, że w zależności od scenariusza na rynku akcji, inwestor zrealizuje zysk (jeśli opcja wygaśnie poza ceną) albo stratę (jeśli opcja zostanie zrealizowana). Gdy porównamy rozumowanie przeprowadzone dla sytuacji bez kosztów transakcji to uzyskamy następującą zależność

$$(1+ k_C)*C_t + m*X/(1 + r*(T-t)) – (1- k_S)*m*S_t \geq 0 \qquad (16)$$

czyli

$$(1+ k_C)*C_t - \max((1 - k_S)*m*S_t - m*X/(1 + r*(T-t), 0) \geq 0$$

2.3. Rynek doskonały (opcja sprzedaży)

Przeprowadźmy podobne rozumowanie na ograniczenie górne i dolne ceny opcji sprzedaży.
Załóżmy, że na rynku jest kwotowana akcja nie płacąca dywidendy z ceną S_0=32 zł oraz opcja sprzedaży na 10 akcji z kursem wykonania X = 30 zł, wygasająca za 6 miesięcy T = 0,5 roku. Niech cena opcji sprzedaży P_t wynosi 310 zł. Załóżmy, że na rynku można lokować i pożyczać środki po stopie wolnej od ryzyka r=6% w skali roku. Zakładamy, że nie ma kosztów transakcji.
Co może zrobić racjonalny inwestor? Otóż powinien:

- wystawić opcję sprzedaży z ceną 310 zł;
- ulokować 310 zł w instrumencie wolnym od ryzyka na okres 6 miesięcy.

W chwili wygaśnięcia kontraktu opcyjnego w chwili T możliwe są dwa scenariusze:
1. S_T < X zł opcja jest w cenie (np. S_T = 25 zł):
   - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka, ma 310*(1+ 0,06*1/2) = 319,30 zł;
   - wypłaca nabywcy różnicę m*(X - S_T) = 10*(30 – 25) = 50 zł;
   - zysk inwestora wynosi: 319,30 - 50 = 269,30 zł .
2. $S_T \geq$ X opcja jest poza ceną (np. S_T = 35 zł), opcja wygasa bez wartości, inwestor:
   - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka, ma 310*(1+ 0,06*1/2) = 319,30 zł;
   - zysk inwestora wynosi: 319,3 zł.

Zauważmy, że w obu scenariuszach inwestor ma zysk z portfela arbitrażowego. W pierwszym scenariuszu zysk zależy od ceny akcji na rynku kasowym – im niższa cena tym mniejszy zysk. W drugim scenariuszu, zysk jest stały i nie zależy od ceny akcji na rynku kasowym.

Zatem możemy poczynić pierwszą obserwację (ograniczenie na cenę opcji sprzedaży od góry):
cena opcji na akcję musi być mniejsza bądź równa cenie tej akcji:

$$P_t \leq m*X/(1 + r*(T-t)) \qquad (17)$$

Prześledźmy to rozumowanie formalnie.
Gdyby nie zachodziła zależność (17) byłby możliwy arbitraż.
Załóżmy, że w chwili t zachodzi zależność

$$P_t > m*X/(1 + r*(T-t))$$

Zatem inwestor w chwili t wystawia opcję sprzedaży za P_t i taką kwotę lokuje w instrumencie wolnym od ryzyka.

W chwili wygaśnięcia kontraktu opcyjnego w chwili T możliwe są dwa scenariusze:
1. S_T < X opcja jest w cenie, inwestor:
   - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka; ma $P_t*(1+r*(T-t)) > 0$;
   - wypłaca nabywcy opcji różnicę: m*(X – S_T);

- zysk inwestora wynosi: P_t *(1+r(T-t)) – m*(X + S_T);

2. $S_T \geq X$ opcja jest poza ceną i wygasa bez wartości, inwestor:
   - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka; ma P_t*(1+r*(T-t)) > 0;
   - zysk inwestora: P_t*(1+r*(T-t)) > 0.

.

Zobaczmy teraz, jakie jest ograniczenie na cenę opcji put od dołu.
Załóżmy, że na rynku jest kwotowana akcja nie płacąca dywidendy z ceną S_0=27 zł oraz opcja sprzedaży na 10 akcji z kurs wykonania X = 30 zł, wygasająca za 6 miesięcy T = 0,5 roku. Niech cena opcji sprzedaży P_t wynosi 15 zł. Załóżmy, że na rynku można lokować i pożyczać środki po stopie wolnej od ryzyka r = 6% w skali roku. Zakładamy, że nie ma kosztów transakcji.

Co może zrobić racjonalny inwestor? Otóż powinien:
- pożyczyć z banku kwotę 270 zł oraz 15 zł na zakup 10 akcji i opcji sprzedaży;
- kupić akcje za 270 zł;
- kupić opcję sprzedaży za 15 zł.

W chwili wygaśnięcia kontraktu opcyjnego w chwili T możliwe są dwa scenariusze:
1. $S_T < X$ zł opcja jest w cenie (np. S_T = 24 zł); inwestor:
   - zamyka pozycję w akcji i opcji sprzedaży, dostaje: 10*24 + 10*(30 – 24) = 300 zł
   - oddaje pożyczkę do banku wysokości: (270+15)*(1+0,06*0,5) = 293,55 zł;
   - zysk inwestora wynosi: 300 – 293,55 zł = 6,45 zł.
2. $S_T \geq X$ opcja jest poza ceną (np. S_T = 33 zł), inwestor:
   - sprzedaje 10 akcji za 330 zł;
   - oddaje pożyczkę do banku wysokości: (270+15)*(1+0,06*0,5) = 293,55 zł;
   - zysk inwestora wynosi: 330 – 293,55 = 36,45 zł.

Zauważmy, że w pierwszym scenariuszu zysk jest stały i wynosi 6,45 zł bez względu na to jak niska będzie cena akcji. W drugim przypadku natomiast zysk inwestora jest zmienny. Im wyższa cena akcji na rynku kasowym tym wyższy zysk inwestora.

Rozważmy to ograniczenie na cenę opcji od góry od strony formalnej.

Utwórzmy w chwili t = 0 dwa portfele A oraz B:
- portfel A – składający się z długiej pozycji w opcji sprzedaży p_0 oraz długiej pozycji w akcji;
- portfel B – składający się z gotówki w wysokości X/(1+r*(T-t)).

	Chwila obecna t=0	Data wykonania T	
		$S_T < X$	$S_T \geq X$
Portfel A:			
• Opcja sprzedaży • Akcja	P_0 m*S_0	m*X	 m*S_T
Wartość portfela	P_0 + m*S_0	m*X	m*S_T
Portfel B:			
• Gotówka	m*X/(1+r*(T-t))	m*X	m*X
Wartość portfela		m*X	m*X

Zauważmy, że w chwili t = T wartość
portfela A wynosi:

$$\max(m*S_T, m*X)$$

a portfela B:

$$m*X$$

Zatem wartość portfela A jest zawsze większa bądź równa wartości portfela B:

$$\text{wartość portfela } A_T \geq \text{wartość portfela } B_T$$

jeśli jest to prawdą dla chwili T, to również nierówność ta jest prawdziwa dla dowolnej chwili t

$$\text{wartość portfela } A_t \geq \text{wartość portfela } B_t$$

i w szczególności dla t=0

$$\text{wartość portfela } A_0 \geq \text{wartość portfela } B_0$$

Zatem w dowolnej chwili t mamy zależność pomiędzy wartościami portfela następującą

$$P_t + m*S_t \geq m*X/(1 + r*(T-t))$$

czyli

$$P_t \geq m*X/(1 + r*(T-t)) - m*S_t$$

W szczególności dla t=0 mamy

$$P_0 \geq m*X/(1 + r*(T-0)) - m*S_0$$

Wiemy, że $P_t \geq 0$. Łącząc ten fakt z wcześniejszym rozumowaniem, mamy zależność

$$P_t \geq m*\max(X/(1 + r*(T-t)) - S_t,0)$$

Łącząc ograniczenie od dołu i od góry na cenę opcji kupna uzyskamy zależność

$$m*\max(X/(1 + r*(T-t)) - S_t,0) \leq P_t \leq m*X/(1 + r*(T-t))$$

2.4. Rynek z kosztami transakcji (opcja sprzedaży)

Powróćmy do naszego przykładu. Zakładamy teraz, że na rynku mamy koszty transakcji. Niech koszty otwarcia pozycji w opcji put wynoszą 2,5% ceny opcji, jednak nie mniej niż 2 zł i nie więcej niż 15 zł, natomiast na rynku kasowym otwarcie/zamknięcie pozycji to 0,40% wartości transakcji.
Na rynku jest kwotowana akcja nie płacąca dywidendy z ceną S_0=32 zł oraz opcja sprzedaży na 10 akcji z kursem wykonania X = 30 zł, wygasająca za 6 miesięcy T = 0,5 roku. Niech cena opcji sprzedaży P_t wynosi 310 zł. Załóżmy, że na rynku można lokować i pożyczać środki po stopie wolnej od ryzyka r=6% w skali roku.
Co może zrobić racjonalny inwestor? Otóż powinien:

- wystawić opcję sprzedaży z ceną 310 zł, koszty transakcji wynoszą 7,75 zł;
- ulokować 310 – 7,75 = 302,25 zł w instrumencie wolnym od ryzyka na okres 6 miesięcy.

W chwili wygaśnięcia T opcji put możliwe są dwa scenariusze:
1. S_T < X zł opcja jest w cenie (np. S_T = 25 zł):

- zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka, ma 302,25*(1+ 0,06*1/2) = 311,32 zł;
- wypłaca nabywcy różnicę m*(X - S_T) = 10*(30 – 25) = 50 zł;

- zysk inwestora wynosi: 311,32 - 50 = 261,32 zł.

2. $S_T \geq X$ opcja jest poza ceną (np. $S_T = 35$ zł), opcja wygasa bez wartości, inwestor:
   - zamyka pozycję w instrumencie wolnym od ryzyka, ma 302,25*(1+ 0,06*1/2) = 311,32 zł;
   - zysk inwestora wynosi: 311,32 zł.

Powtarzając rozumowanie dla ogólnych wielkości dostaniemy zależność

$$(1 - k_P)\, P_t \leq m^*X/(1 + r^*(T\text{-}t)) \qquad (18)$$

gdzie k_P koszty opcji put.
Jeśli nierówność ta nie jest spełniona istnieje możliwość arbitrażu.

Zobaczmy jak wyglądają ograniczenia od dołu na opcję put na rynku z kosztami transakcji. Załóżmy, że na rynku jest kwotowana akcja nie płacąca dywidendy z ceną $S_0 = 15$ zł oraz opcja sprzedaży na 10 akcji z kursem wykonania X = 30 zł, wygasająca za 6 miesięcy T = 0,5 roku. Niech cena opcji sprzedaży P_t wynosi 24 zł. Załóżmy, że na rynku można lokować i pożyczać środki po stopie wolnej od ryzyka r = 6% w skali roku. Zakładamy, że nie ma kosztów transakcji.

Co może zrobić racjonalny inwestor? Otóż powinien:

- pożyczyć z banku kwotę 270 zł oraz 15 zł na zakup 10 akcji i opcji sprzedaży oraz dodatkowo na koszty transakcji akcji (1,08 zł) i opcji put (2 zł);
- kupić akcje za 270 zł, koszty transakcyjne 1,08 zł;
- nabyć opcję sprzedaży za 15 zł, koszty transakcyjne 2 zł.

W chwili wygaśnięcia kontraktu opcyjnego w chwili T możliwe są dwa scenariusze:

1. $S_T < X$ zł opcja jest w cenie (np. $S_T = 24$ zł); inwestor:
   - zamyka pozycję w akcji i opcji sprzedaży, dostaje: 10*24 + 10*(30 – 24) = 300 zł; koszty na rynku akcji wynoszą 0,96 zł;
   - oddaje pożyczkę do banku wysokości: (270+15+1,08+2)*(1+0,06*0,5) = 296,72 zł;
   - zysk inwestora wynosi: 300 – 0,96 – 296,72 zł = 2,32 zł.
2. $S_T \geq X$ opcja jest poza ceną (np. $S_T = 33$ zł), inwestor:
   - sprzedaje 10 akcji za 330 zł; koszty transakcyjne wynoszą 1,32;
   - oddaje pożyczkę do banku wysokości: 288,08*(1+0,06*0,5) = 296,72 zł;
   - zysk inwestora wynosi: 330 – 1,32 – 296,72= 31,96 zł.

Zauważmy, że również na rynku z kosztami transakcji, inwestor ma zysk bez ryzyka. W pierwszym scenariuszu zysk jest stały i wynosi 2,32 zł bez względu na to jak niska będzie cena akcji. W drugim przypadku natomiast zysk inwestora jest zmienny. Im wyższa cena akcji na rynku kasowym tym wyższy zysk inwestora.

Powtarzając rozumowanie przedstawione dla rynku bez kosztów, możemy analogiczne przeprowadzić teraz. Wtedy ograniczenie na cenę opcji sprzedaży od dołu będzie miało postać:

$$(1+k_p)^*P_t \geq m^*\max(X/(1 + r^*(T\text{-}t)) - (1+ t_S)^*S_t, 0) \qquad (19)$$

Jeśli zależność (19) nie zachodzi mamy możliwość arbitrażu na rynku z kosztami transakcji

2.5. Put-call parity

Można zauważyć, że długa pozycja w kontrakcie futures jest równoważna długiej pozycji w europejskiej opcji kupna (z ceną C_t) i krótkiej pozycji w europejskiej opcji sprzedaży (z ceną P_t) z terminem *T* i ceną wykonania *X* jak kontrakt futures. Czyli inaczej jest to parytet put-call (*put-call parity*):

$$C_t - P_t = S_t - X/(1+r^*(T\text{-}t)) \qquad (20)$$

Gdyby nie zachodziła równość (20) byłaby możliwość arbitrażu.

Jeśli uwzględnimy fakt, że cena futures $F(t,T) = S_t^*(1+r^*(T\text{-}t))$, to zależność (20) możemy przedstawić jako

$$C_t - P_t = F(t,T)/(1+r^*(T\text{-}t)) - X/(1+r^*(T\text{-}t)) \qquad (21)$$

czyli

$$C_t - P_t = (F(t,T) - X)/(1+r^*(T\text{-}t))$$

lub inaczej

$$(C_t - P_t)^*(1+r^*(T\text{-}t)) = F(t,T) - X \qquad (22)$$

Gdy weźmiemy pod uwagę koszty transakcji równość (21) będzie miała postać:

$$(1+k_C)^*C_t - (1 - k_P)^*P_t = (1+k_S)^*S_t - X/(1+r^*(T\text{-}t)) \qquad (23)$$

Natomiast, gdy weźmiemy pod uwagę kontrakt futures z ceną F(t,T) zamiast rynku spot uzyskamy

$$(1+k_C)^*C_t - (1 - k_P)^*P_t = (k_F + F(t,T))/(1+r^*(T\text{-}t)) - X/(1+r^*(T\text{-}t)) \qquad (24)$$

i w konsekwencji

$$((1+k_C)^*C_t - (1 - k_P)^*P_t)^*(1+r^*(T\text{-}t)) = k_F + F(t,T) - X \qquad (25)$$

Zobaczmy czy działa put-call parity na GPW. Będziemy rozważać indeks WIG20, kontrakt czerwcowy na indeks FW20M4 oraz opcje kupna i sprzedaży indeksu. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że stopa dywidendy q=0. Najpierw rozważmy sytuację, gdy nie ma kosztów transakcji, a następnie przypadek z kosztami transakcji.

W dniu 21 maja 2004 roku na zamknięcie notowań ciągłych, cena kontraktu czerwcowego F(t,T) = 1670, cena opcji kupna z kursem wykonania X=1600 punktów wynosiła C_t = 86,0 a cena opcji sprzedaży za taką samą ceną wykonania wynosiła P_t = 20,95. Załóżmy, że stopa wolna od ryzyka r = 5,4%.

Dla takich parametrów, zależność (21) nie jest spełniona. Racjonalny inwestor powinien:
- pożyczyć z banku 860,0 – 209,5 = 650,50 zł;
- nabyć opcję kupna za 860,0 zł;
- wystawić opcję sprzedaży za 209,50 zł;
- zająć krótką pozycję w kontrakcie czerwcowym po 1670 punktów.

W chwili wygaśnięcia opcji i kontraktu, czyli 18 czerwca 2004 roku możliwe są dwa scenariusze:
1. S_T < 1600 punktów (np. S_T = 1500 punktów):
   - kontrakt futures daje wypłatę 10*(1670-1500) = 1700 zł;
   - opcja kupna wygasa bez wartości;
   - krótka pozycja w opcji sprzedaży generuje przepływ 10*(1500 – 1600)= -1000 zł;
   - do banku inwestor oddaje 650,50*(1+,0054*0,08)=653,19 zł;
   - zysk inwestora wynosi: 1700 – 1000 – 653,19 = 46,81 zł.

2. $S_T \geq 1600$ punktów (np. $S_T = 1700$ punktów):
- kontrakt futures daje wypłatę 10*(1670-1700) = -300 zł;
- opcja kupna generuje przepływ 10*(1700-1600) = 1000 zł;
- opcja sprzedaży wygasa bez wartości;
- do banku inwestor oddaje 650,50*(1+,0054*0,08)=653,19 zł
- zysk inwestora wynosi: 1000 – 300 – 653,19 = 46,81 zł.

Zysk inwestora w obu przypadkach będzie taki sam, bez względu na zrealizowany scenariusz na rynku kasowym.
Zobaczmy jak będzie wyglądała możliwość arbitrażu, jeśli na rynku mamy koszty transakcji. Zatem w rozważanym przypadku $k_F = 12$ zł, $k_C = 15$ zł, $k_P = 5{,}24$ zł.
W konsekwencji lewa strona zależności (25) wynosi 670,34 zł, a prawa strona 752 zł. Zatem jest możliwy arbitraż. W takiej sytuacji, racjonalny inwestor powinien:
- pożyczyć z banku 860,0 + 15 – 209,5 + 5,24 + 12 = 682,74 zł;
- nabyć opcję kupna za 860,0 zł, przy kosztach transakcji 15 zł;
- wystawić opcję sprzedaży za 209,50 zł, przy kosztach transakcji 5,24 zł;
- zająć krótką pozycję w kontrakcie czerwcowym po 1670 punktów, przy kosztach transakcji 12 zł.

W chwili wygaśnięcia opcji i kontraktu możliwe są dwa scenariusze:
1. $S_T < 1600$ punktów (np. $S_T = 1500$ punktów):
- kontrakt futures daje wypłatę 10*(1670-1500) = 1700 zł;
- opcja kupna wygasa bez wartości;
- krótka pozycja w opcji sprzedaży generuje przepływ 10*(1500 – 1600)= -1000 zł;
- do banku inwestor oddaje 682,74*(1+,0054*0,08)=685,56 zł;
- zysk inwestora wynosi: 1700 – 1000 – 685,56 = 14,44 zł.

2. $S_T \geq 1600$ punktów (np. $S_T = 1700$ punktów):
- kontrakt futures daje wypłatę 10*(1670-1700) = -300 zł;
- opcja kupna generuje przepływ 10*(1700-1600) = 1000 zł;
- opcja sprzedaży wygasa bez wartości;
- do banku inwestor oddaje 682,74*(1+,0054*0,08)=685,56 zł
- zysk inwestora wynosi: 1000 – 300 – 685,56 = 14,44 zł.

W obu scenariuszach założyliśmy, że przy wygaśnięciu opcji i kontraktu nie ma dodatkowych opłat.

Powyżej przedstawiliśmy ograniczenia dolne i górne na opcje kupna i sprzedaży oraz put-call parity. Z racji nieliniowej funkcji wypłaty opcji, możemy konstruować wiele innych strategii opcyjnych i przy określonych warunkach uzyskiwać portfele arbitrażowe.

Jerzy A. Dzieża
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie